සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි]
All Rights Reserved)

№ 20018

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව/Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, අගෝස්තු 1991
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 1991

	02	
(02) ව්‍යවහාරික ගණිතය I (02) Applied Mathematics I	S	I

පැය තුනයි / *Three hours*

ප්‍රශ්න හයකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

---

1. O, A, B, C යනු O, A, B ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛීය නොවන පරිදි වූ ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍ය හතරකි. α හා β යනු නිශ්ශූන්‍ය සංඛ්‍යා විට $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ වේ.

   (i) OA රේඛාව මත D නම් ලක්ෂ්‍යයක් ගෙන ඇත්තේ $\overrightarrow{OD} = \gamma\mathbf{a}$ වන පරිදි ය. $\overrightarrow{DC} = \delta\mathbf{b}$ වන අයුරින් γ හිත් δ හිත් අගයන් සොයන්න.

   (ii) $\alpha, \beta, \mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ඇසුරින් $\overrightarrow{AB}$ හා $\overrightarrow{AC}$ ප්‍රකාශ කරන්න. $\alpha + \beta = 1$ නම්, A, B, C ලක්ෂ්‍ය ඒක-රේඛීය බව පෙන්වන්න. තව ද, A ත් B ත් අතර C පිහිටන බව දී ඇති නම්, α ඇසුරෙන් පමණක් $AC : CB$ අනුපාතය ප්‍රකාශ කර, $0 < \alpha < 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

   (iii) P, Q යනු $\overrightarrow{OP} = 2\mathbf{a}$ ද $\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\mathbf{b}$ ද වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍ය දෙකකි. AB හිත් PQ හිත් ඡේදන ලක්ෂ්‍යය R ය. $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ඇසුරෙන් $\overrightarrow{OR}$ ප්‍රකාශ කර, $AR : RB$ හා $PR : RQ$ යන අනුපාත සොයන්න.

2. (අ) $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ යන නිශ්-ශූන්‍ය දෛශික දෙකක් $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ අදිශ ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න. පහත සඳහන් ඒවා පිහිටුවන්න :

   (i) $(-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (-\mathbf{b}) = -\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$

   (ii) $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ලම්බ නම් ම පමණක් $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$

   $\mathbf{e}$ යනු ඒකක දෛශිකයක් නම් $\mathbf{e}\cdot\mathbf{b}$ ජ්‍යාමිතික ලෙස විවරණය කරන්න. $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ හා $\mathbf{c}$ යන ඕනෑ ම දෛශික තුනක් සඳහා

   $$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

   බව පෙන්වන්න.

   (ආ) ABC යනු ත්‍රිකෝණයකි. අදිශ ගුණිතය පිළිබඳ ගුණ භාවිත කර, ABC ත්‍රිකෝණයේ, A, B, C යන ශීර්ෂවල සිට පිළිවෙළින් BC, CA, AB සම්මුඛ පාදවලට ඇඳි AL, BM, CN ලම්බ ඒකලක්ෂ්‍ය වන බව පෙන්වන්න.

[අනෙක් පිට බලන්න.

3. **a** හා **b** යන දෛශික දෙකෙහි **a** × **b** දෛශික ගුණිතය අර්ථ දක්වන්න.

Oxyz යනු සුරත් සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසිය ඛණ්ඩාංක පද්ධතියකි. **i**, **j**, **k** යනු පිළිවෙලින් *Ox*, *Oy*, *Oz* අක්ෂවල ධන දිශා ඔස්සේ වූ ඒකක දෛශික යි.

$\mathbf{i} \times \mathbf{i}$ සහ $\mathbf{k} \times \mathbf{j}$ සොයන්න.

O මූල ලක්ෂ්‍යය අනුබද්ධයෙන් *P*, *Q*, *R* ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින්,

$$\mathbf{p} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k},$$
$$\mathbf{q} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

වේ. *PQRS* සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි වූ *S* ලක්ෂ්‍යයේ **s** පිහිටුම් දෛශිකය සොයන්න.

තව ද

(i) $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS}$ ද

(ii) *PQRS* සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය ද

(iii) *PQRS* තලයට ලම්බ ඒකක දෛශිකය ද
සොයන්න.

4. බර *W* වූ ද *G* ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙන් දණ්ඩ *a* හා *b* දිගැති කොටස් දෙකකට බෙදන්නාවූ ද *AB* දණ්ඩක දෙකෙළවරට $l\ (> a + b)$ දිග ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් ගැට ගසා තිබේ. තන්තුව, කුඩා සුමට *P* නාදත්තක් උඩින් යවා දණ්ඩ සමතුලිතතාවේ තබා ඇත.

(අ) (i) $A\hat{P}G = B\hat{P}G$ බව ද

(ii) $\cos A\hat{P}G = \dfrac{a + b}{2l}\left[\dfrac{l^2 - (a + b)^2}{ab}\right]^{\frac{1}{2}}$ බව ද

පෙන්වන්න.

(ආ) තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

5. *n* ඒකතල බල පද්ධතියක *r* වැනි (X_r, Y_r) බලය, තලයේ වූ *Oxy* සෘජුකෝණාස්‍ර කාටීසිය අක්ෂ අනුබද්ධයෙන් $A_r \equiv (x_r, y_r)$, $r = 1, 2 \ldots n$, ලක්ෂ්‍යයේ දී ක්‍රියා කරයි.

$P \equiv (x, y)$ ලක්ෂ්‍යය වටා බල පද්ධතියේ G_P ඝූර්ණය,

$$G_P = G_O - xY + yX$$

යන්නෙන් ලැබෙන බව පෙන්වන්න. මෙහි

$$G_O = \sum_{r=1}^{n} (x_r Y_r - y_r X_r), \quad X = \sum_{r=1}^{n} X_r, \quad Y = \sum_{r=1}^{n} Y_r.$$

ABC ත්‍රිකෝණයේ *AB*, *BC* හා *CA* පාද පිළිවෙලින් $x + y = a$, $y - x = a$ හා $y = 2a$ මගින් දෙනු ලැබේ: මෙහි $a > o$. විශාලත්වය *R*, *R* හා *S* වූ ද පිළිවෙලින් *AB*, *BC* හා *CA* ඔස්සේ අක්ෂරවල පටිපාටියෙන් දක්වෙන අතට ක්‍රියා කරන්නා වූ ද බල තුනකින් හා ඝූර්ණය $2aS$ වූද *ABC* ත්‍රිකෝණයෙහි තලයේ *ACB* අභිදිශාවට] ක්‍රියා කරන්නා වූද යුග්මයකින් පද්ධතියක් සමන්විත වෙයි. $S \neq \sqrt{2}R$ නම් පද්ධතිය, තනි බලයකට ඌනනය වන බව පෙන්වා, එහි ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

$S = \sqrt{2}R$ විට කිමෙක් සිදු වෙයි ද?

6. එක එකක බර W ද දිග $2a$ ද වන AB සහ AC සමාන, ඒකාකාර දඬු දෙකක් A හි දී නිදහස් ලෙස සන්ධි කර, B සහ C දෙකෙළවර සුමට තිරස් මේසයක් මත පිහිටන සේ සිරස් තලයක තබා ඇත. සමතුලිතතාව පවත්වා ගන්නේ C ලක්ෂ්‍යයත් AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයත් යා කැරෙන ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගිනි. එක් එක් දණ්ඩ තිරස සමඟ $\alpha \left(< \frac{\pi}{2} \right)$ කෝණයක් සාදයි. තන්තුවේ ආතතිය,

$$T = \frac{W}{4} \sqrt{1 + 9 \cot^2 \alpha}$$

බව පෙන්වන්න.

A සන්ධියේ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වයත් දිශාවත් සොයන්න.

7. ආධාරකයේ අරය r ද අඩ සිරස් කෝණය α ද වන ඒකාකාර සෘජුවෘත්තාකාර ඝන, කේතුවක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, ශීර්ෂයේ සිට $\frac{3}{4} r \cot \alpha$ දුරකින් අක්ෂය මත පිහිටන බව පෙන්වන්න.

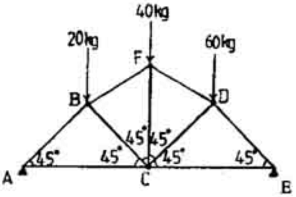
ඒකාකාර සෘජුවෘත්තාකාර ඝන කේතුවක ඡින්නකයක, වෘත්තාකාර දෙකෙළවරේ අරයන් a හා λa $(\lambda > 1)$ ද උස h ද වෙයි. කුඩාතම ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට ඡින්නකයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර

$$\frac{h}{4} \left(\frac{3\lambda^2 + 2\lambda + 1}{\lambda^2 + \lambda + 1} \right)$$

බව පෙන්වන්න.

කුඩාතම ආධාරකයෙහි පරිධියේ වූ ලක්ෂ්‍යයකින් ඡින්නකය නිදහස් ලෙස එල්ලනු ලැබෙයි. සමතුලිත පිහිටීමේ දී අක්ෂය, සිරසට $\alpha \left(< \frac{\pi}{2} \right)$ කෝණයෙකින් ආනත වෙයි. $\tan \alpha$ සොයන්න.

8.



ඉහත දක්වෙන පරිදි B, F හා D සන්ධිවල දී භාරයන් යෙදූ ලුහු දඬුවලින් යුත් රාමු සැකිල්ලක් රූපයෙන් නිරූපණය වෙයි. AC හා CE තිරස් ය. ඒ එක එකක් මීටර 10 ක් දිග ය. $CF =$ මීටර 8 යි. තව ද $AB = BC = CD = DE$ වන අතර $BF = FD$ වේ. A හිත් E හිත් ප්‍රතික්‍රියා සිරස් යැයි උපකල්පනය කරමින් ඒවා ගණනය කරන්න.

A සන්ධියෙන් ආරම්භ කර ප්‍රත්‍යාබල රූප සටහනක් අඳින්න. දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල සොයා ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන වග නිශ්චය කරන්න.

9. බර W වූ ද දිග $2a$ වූ ද ඒකාකාර AB දණ්ඩක්, එහි A කෙළවර රළු තිරස් පොළවකට ද B කෙළවර රළු සිරස් බිත්තියකට ද හේත්තු වන සේ තිරසට α කෝණයකින් තබා ඇත. දණ්ඩ, බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක පිහිටයි. A හි දීත් B හි දීත් ඝර්ෂණ සංගුණකය μ (< 1) වෙයි. දණ්ඩ සීමාකාරී සමතුලිතතාවේ පවතී නම්

$$\tan \alpha = \frac{1 - \mu^2}{2\mu}$$

බව පෙන්වන්න.

දණ්ඩේ තිරසට ආනතිය θ $(< \alpha)$ නම් ද දණ්ඩ පහළට ලිස්සා යාම යන්තම් වැළැක්වෙන පරිදි M ඝූර්ණයෙන් යුත් යුග්මයක් දණ්ඩ හරහා යන සිරස් තලයේ යොදන්නේ නම් ද

$$(1 + \mu^2) M = (1 - 2\mu \tan \theta - \mu^2) Wa \cos \theta$$

බව පෙන්වන්න,

[අනෙක් පිට බලන්න.

10. $ABCD$ සෘජුකෝණාස්‍ර ආස්තරයක්, ඝනත්වය ρ වන සමජාතීය ද්‍රවයක ගිල්වා ඇත්තේ එහි ඉහළ AB දාරය තිරස් ව ද BC සිරස් ව ද පිහිටන පරිදි ය. AB හි දිග $= b$ ද BC හි දිග $= a$ ද වෙයි. AB ඇත්තේ ද්‍රව පෘෂ්ඨයට පහළින් h ගැඹුරකින් නම්, පීඩන කේන්ද්‍රය AB ට පහළින්

$$\frac{a}{3}\,\frac{(2a + 3h)}{(a + 2h)}$$

ගැඹුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

දැන් AB පාදය ද්‍රව පෘෂ්ඨයට එන තෙක් $ABCD$ ආස්තරය සිරස් ලෙස ඔසවනු ලැබේ. BD විකර්ණය වටා නිදහස් ලෙස භ්‍රමණය වීම වැළැක්වීමට අවශ්‍ය යුග්මයේ ඝූර්ණය

$$\frac{1}{12}\,\frac{a^3\, b^2\, \rho\, g}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

බව පෙන්වන්න.

11. උස h ද සිරස් කෝණය $60°$ ද වන සෘජුවෘත්ත කේතුවක් ජලයේ ගිල්වා ඇත්තේ එහි ශීර්ෂය ජලය පෘෂ්ඨයේ පිහිටන ලෙසත් එහි අක්ෂය තිරස සමග $60°$ කෝණයක් සාදන ලෙසත් ය. කේතුවෙන් විස්ථාපනය වන ජලයේ බර W නම්,

(i) කේතුවේ ආධාරකය මත තෙරපුම $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\,W$ බව ද,

(ii) කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත තෙරපුම $\dfrac{\sqrt{13}}{2}\,W$ බව ද,

පෙන්වන්න.

වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත තෙරපුමේ දිශාව කිමෙක් ද?

12. ද්‍රවස්ථිති විද්‍යාවේ එන ආකිමිඩීස් මූලධර්මය ප්‍රකාශ කරන්න.

ඒකාකාර සෘජු ප්‍රිස්මයක හරස්-කඩ වනුයේ ABC සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයකි. එහි $AB = BC$. ප්‍රිස්මයේ විශිෂ්ට ගුරුත්වය σ (<1) ය. A ලක්ෂ්‍යය ඉහළින් ම පිහිටන සේ ප්‍රිස්මය ආංශික වශයෙන් ජලයේ ගිල්වා ඇත. ජල පෘෂ්ඨයෙහි අවල ව තබා ඇති C හරහා යන දාරය වටා ප්‍රිස්මයට භැරෙන්නට නිදහස තිබෙයි. යටිඅත් සිරස සමඟ BC හි ආනතිය θ නම්, සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී θ,

$$\cot^3\theta + (2 - \sigma)\cot\theta - 2\sigma = 0$$

සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න.